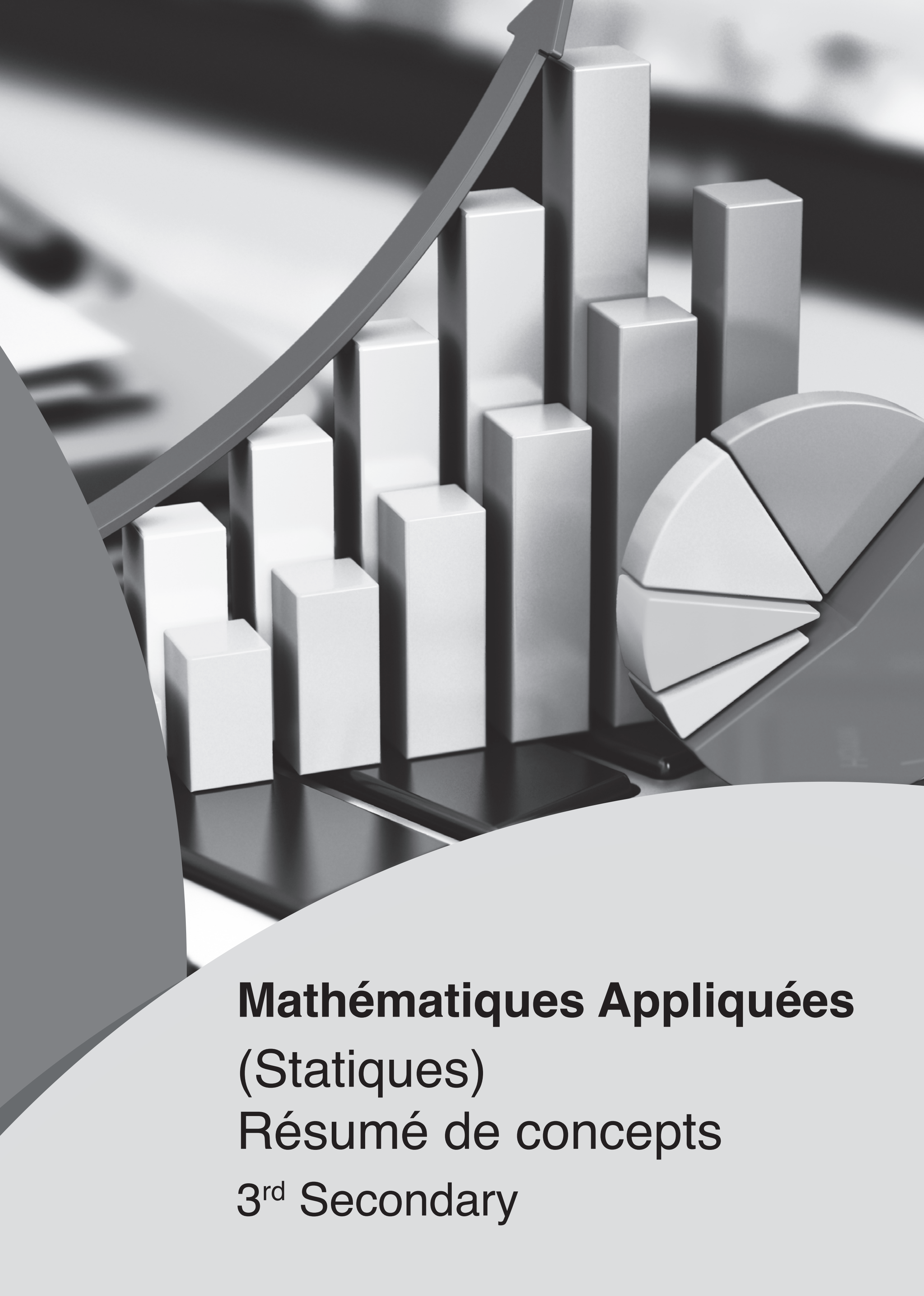


Mathématiques Appliquées

(Statiques)

Résumé de concepts

3^{rd} Secondary

FROTTEMENT

Surfaces lisses : Les forces de frottement s'annulent sur elles et le coefficient de frottement = 0.

Surface rugueux : Les forces de frottement apparait sur elles et le coefficient de frottement est égale à une valeur réelle positive.

Réaction :

* **Dans le cas des surfaces lisses :** la réaction est orthogonale sur la surface tangentielle commune de deux corps.

* **Dans le cas des surfaces rugueux :** la réaction a de sens inconnu dépond de la nature de deux surfaces tangentes. Et dépond aussi de forces agissant sur le corps

Force de frottement statique : à cause de toucher de deux surfaces ou s'ils sont sur le point de se mouvoir. Elle est dans le sens opposé de la force causant le mouvement possible. Son intensité donnée par l'inéquation $0 \leq F' \leq \mu_s R$ où μ_s est le coefficient de frottement statique.

Force de frottement statique limite : Quand la force de frottement statique (F_s) arrive à sa valeur maximale, le corps sera sur le point de se mouvoir (sans déplacer) et le frottement est alors limite et (F_s) et $F_s = \mu_s R$

Force de frottement dynamique : Si un corps se déplace sur une surface rugueuse, alors il soumit à une force de frottement dynamique dont le sens est opposé du mouvement. Son intensité est donnée par la relation $F'_D = \mu_D R$ où μ_D est le coefficient de frottement dynamique.

Remarques sure le coefficient de frottement statique et dynamique :

* μ_S, μ_D chacun de dépend de natures du corps et de la surface, mais ne dépend ni de l'aire des surfaces tangentielles ni de la masse du corps.

* Le coefficient de frottement statique (μ_S)> Le coefficient de frottement dynamique (μ_D)

Réaction résultante : La réaction résultante (R') est la résultante de la réaction normale R et la force de frottement F_s

Angle de frottement : c'est l'angle compris entre la réaction normale et la réaction résultante, atteigne sa valeur maximale quand le frottement est limite.

Relation entre le coefficient du frottement et l'angle du frottement : Si le frottement est limite, alors le coefficient de frottement est égal à la tangente de l'angle de frottement.

Relation entre la mesure de l'angle de frottement et la mesure de l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontal : Si un corps posé sur un plan rugueux incliné est sur le point de se glisser, alors la mesure de l'angle de frottement est égale à la mesure de l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontal

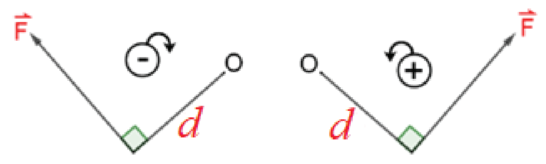
MOMENTS

1. ***Moment d'une force F par rapport à un point*** : Le moment d'une force F par rapport au point O est la puissance de la force F à faire une rotation du corps par rapport à O.

Le moment est déterminé par la relation $\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}$ où r est le vecteur position d'un point de la ligne d'action de la force par rapport au point (O) et la direction du moment est perpendiculaire au plan contenant F et r .

2. ***Norme du moment d'une force par rapport à un point :*** si F est la norme de F, d est la longueur de la perpendiculaire issue du point O sur la ligne d'action de la force, alors la norme du moment de la force F par rapport au point O est déterminée par la relation $\|M_O\| = Fd$.

3. ***La mesure algébrique du moment d'une force par rapport à un point :***



Si la force fait tourner le corps autour de O, suivant le sens opposé des aiguilles d'une montre, alors la mesure algébrique du moment de la force est positive et si la force fait tourner le corps autour de O, suivant le même sens des aiguilles d'une montre, alors la mesure algébrique du moment de la force est négative.

4. la longueur de la perpendiculaire issue du point O sur la ligne d'action de la force est d où $d = \frac{\|M_O\|}{\|F\|}$

5. Si le moment d'une force non nulle par rapport à un point est nul, alors la ligne d'action de la force passe par ce point.

6. ***Le Principe du moment (théorème de Farinons)*** le moment la force F par rapport à un point est égal à la somme des moments de ses composantes par rapport au même point

7. ***Théorème :*** La somme de moments d'un ensemble des forces coplanaires concourantes par rapport à un point de l'espace est égale au moment de leur résultante par rapport au même point

8. Si la somme de moments d'un ensemble des forces coplanaires par rapport au point A = la somme de moments de ces forces par rapport au point B, alors la ligne d'action de leur résultante est parallèle à AB

9. Si la somme de moments d'un ensemble de forces coplanaires par rapport au point A = - la somme de moments de ces forces par rapport au point B, alors la ligne d'action de leur résultante passe par le milieu de $\overline{AB}$.

10. ***Le moment d'une force par rapport à un point de l'espace est égal à*** $\overrightarrow{M_0} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$ où r est le vecteur position d'un point de la ligne d'action de la force par rapport au point d'origine O

11. ***Les composantes de moment d'une force suivant les axes*** si la force $F = (F_x, F_y, F_z)$ agit à un point dont le vecteur position par rapport à l'origine $r = (x, y, z)$ alors

$(y F_z - z F_y) \longrightarrow$ La composante de F suivant l'axe de x

$(z F_x - x F_z) \longrightarrow$ La composante de F suivant l'axe de y

$(x F_y - y F_x) \longrightarrow$ La composante de F suivant l'axe de z

FORCES PARALLELES COPLANAIRES

1. **Résultante de deux forces parallèles et de même sens**

$\overrightarrow{F_1} = F_1\vec{e}, \overrightarrow{F_2} = F_2\vec{e}$ sont appliquées aux points A et B

La résultante $\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ agissant au point $C \in \overline{AB}$ telle que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow AC \times F_1 = CB \times F_2$$

2. **Résultante de deux forces parallèles et de sens contraires :**

$\overrightarrow{F_1} = F_1\vec{e}, \overrightarrow{F_2} = -F_2\vec{e} \quad \left(F_1 > \overrightarrow{F_2}\right)$ sont appliquées aux points A et B :

La résultante $\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \left(F_1 - F_2\right)\vec{e}$ agissant au point $C \in BA$ tel que :

$$\frac{AC}{CB} = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow AC \times F_1 = CB \times F_2$$

3. **Moments d'un système de forces parallèles coplanaires :**

Théorème (La somme des moments d'un nombre fini de forces parallèles coplanaires par rapport à un point quelconque est égale au moment de leur résultante par rapport à ce même point.

4. **Résultante d'un système de forces parallèles coplanaires :**

Si $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ sont des forces parallèles agissant aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, alors la résultante est R où $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n}$ agit au point C telle que

$$A_1C = \frac{\left\| \text{somme des mesures algébriques de moments de forces par rapport au point } A_1 \right\|}{\left\| R \right\|}$$

5. Equilibre d'un système des forces parallèles coplanaires :

Règle :

Si un corps rigide est en équilibre sous l'action d'un système des forces parallèles coplanaires, alors

1- La somme des mesures algébriques de ces forces s'annule (résultante = 0)

2 - La somme des mesures algébriques des moments de ces forces par rapport à un point quelconque de leur plan s'annule.

EQUILIBRE GENERALE

Si un corps rigide est en équilibre sous l'effet de deux forces, alors on peut transmettre le point d'application de chacune de deux forces à un point sur la ligne d'action de la force sans changer l'état du corps.

Si trois forces concourantes son en équilibre, et on trace un triangle dont les côtés sont parallèles aux droites d'action des forces, alors les longueurs des côtés sont proportionnelles aux intensités des forces.

Si un corps est en équilibre sous l'effet de trois forces coplanaires concourantes, alors l'intensité de chacune de ces forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres forces.

Conditions d'équilibre d'un corps sous l'effet de plusieurs forces coplanaires concourantes :

* la somme algébrique des composantes des forces dans la direction de $\mathrm{O}x = 0$

* la somme algébrique des composantes des forces dans la direction de $\mathrm{O}y = 0$

S'annule la somme de moment des forces par rapport à un point. La somme de moment des forces dans le sens de rotation des aigues de montre est équilibre avec le somme de moment des forces contre le sens de rotation des aigues d'une montre

Conditions nécessaires et suffisantes pour équilibre d'un système des forces :

* S'annule la somme des composantes algébriques des forces dans deux directions perpendiculaires appartenant au plan des forces.

* S'annule la somme des mesures algébriques du moment de ce système par rapport à un seul point appartenant au plan des forces.

* L'expression mathématique de ces conditions sera donc $x = 0$, $y = 0$, $\mathrm{M} = 0$

COUPLES

Définition d'un couple : Un couple est un système composé de deux forces parallèles d'intensité égale, de sens contraires et n'ayant pas une ligne d'action commune.

Moment d'un couple : Le moment d'un couple est défini par la somme des moments des deux forces par rapport à un point de l'espace et sa norme est égale au produit de l'intensité d'une des deux forces par la distance séparant leurs lignes d'action.

Théorème **:** Le moment d'un couple est une valeur constante, ne dépendant pas du point par rapport auquel les moments des deux forces du couple sont calculés.

Equilibre de deux couples : Deux couples sont en équilibre si la somme de leurs moments est le vecteur nul.

Equilibre d'un corps rigide sous l'action de plusieurs couples Si un corps est soumis sous l'action des couples coplanaires dont les moments sont $\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}, \overrightarrow{M_3}, \ldots, \overrightarrow{M_n}$ alors la condition d'équilibre de ce corps sous l'action de ces deux couples est $\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_n} = \vec{0}$

Equivalence de deux couples : Deux couples coplanaires sont équivalents si et seulement si les mesures algébriques de leurs moments sont égales.

Equivalence d'un système de forces coplanaires et un couple : $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ est équivalent à un couple s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1 - la résultante des forces s'annule coplanaires $\left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots + \overrightarrow{F_n} = \vec{0}\right)$.

2 - la somme des moments de forces par rapport à un point quelconque n'est pas égale à zéro.

***Règle* (1) :** Si trois forces coplanaires non concourantes appliquées à un corps rigide sont complètement représentées par les trois côtés d'un triangle, pris dans un ordre cyclique, ce système de forces est équivalent à un couple dont la norme du moment est égale au produit du double de l'aire du triangle par l'intensité de la force représentant l'unité de longueur.

Généralisation : Si des forces coplanaires appliquées à un corps rigide sont complètement représentées par les côtés d'un polygones fermé, pris dans un ordre

cyclique, ce système de forces est équivalent à un couple dont la norme du moment est égale au produit du double de l'aire du polygone par l'intensité de la force représentant l'unité de longueur.

***Règle* (2) :** Si la somme des mesures algébriques des moments d'un ensemble des forces coplanaires par rapport aux trois points non alignés appartenant à son plan est égale à une valeur constante non nulle, alors cet ensemble est équivalent à un couple dont le moment est égal à cette valeur constante.

Couple résultant : La somme de deux couples coplanaires $\overrightarrow{M_1}$ et $\overrightarrow{M_2}$ est un couple dont le moment est égal à la somme des moments de ces deux couples $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2}$

CENTRE DE GRAVITE

1) **Le centre de gravité d'un corps** rigide est un point fixe dans le corps, par lequel passe la ligne d'action de la force du poids de ce corps, quelle que soit la position de ce corps par rapport à la Terre.

2) **Remarque sur le centre de gravité :**

Le centre de gravité d'un corps rigide sa change si le corps change sa forme, car les distances entre ses points matériels seront changées.

Le corps homogène : C'est un corps dont la masse d'une unité de longueur ou d'aire ou de volume de ce corps est toujours fixe.

3) **Vecteur de position du centre de gravité d'un corps rigide par rapport au point d'origine :**

Si $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ sont les poids des points matériels formant le corps et $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_3}, \ldots, \overrightarrow{r_n}$ sont les vecteurs positions de ces points matériels par rapport à l'origine.

Alors le vecteur position r_G du centre de gravité par rapport au point d'origine se détermine par la formule :

$$r_G = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2} + m_3\overrightarrow{r_3} + \ldots + m_n\overrightarrow{r_n}}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}$$

On peut écrire les relations vectorielles en fonctions des composantes suivant les axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$, on obtient les relations :

$$\overline{x_G} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}, \qquad \overline{y_G} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}$$

4) **Suspension libre d'un corps rigide :** Lors de la suspension libre d'un corps rigide de l'un de ses points, le centre de gravité de ce corps appartient à la ligne verticale passant par le point de suspension

5) **Le centre de gravité d'une barre mince de densité** constante est situé au milieu de cette barre.

6) **Le centre de gravité d'une plaque homogène mince**, délimité par un parallélogramme est situé au centre géométrique du parallélogramme (point d'intersection des diagonales).

7) **Le centre de gravité d'une plaque homogène mince, délimité par un triangle** est situé au point d'intersection des médianes de ce triangle.

8) **Considérons un corps de masse** (m) et la masse de la partie coupée $(-m_1)$, la masse de la partie de la partie droit restante $(m - m_1)$. Donc r_2 est donné par la relation suivante : $r_2 = \dfrac{m\overrightarrow{r_G} - m_1\overrightarrow{r_1}}{m - m_1}$

On peut écrire la relation vectorielle précédente en fonction des composantes algébriques dans un repère cartésien $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$, on obtient les coordonnées de la partie restante qui sont :

$$x_2 = \frac{m x_G - m_1 x_1}{m - m_1}, \qquad y_2 = \frac{m y_G - m_1 y_1}{m - m_1}$$

9) **Si une plaque géométrique mince admet un axe de symétrie,** alors son centre de gravité appartient à cet axe.

10) **Si une solide géométrique admet un plan de symétrie,** alors son centre de gravité appartient à ce plan.

11) **Cas particuliers**

* Le centre de gravité d'un fil de densité uniforme en forme de cercle est au centre de ce cercle.

* Le centre de gravité d'une plaque de densité uniforme délimité par cercle est au centre de ce cercle.

* Le centre de gravité d'une coque sphérique de densité uniforme est au centre de la sphère.

* Le centre de gravité d'une sphère solide de densité uniforme est au centre de la sphère.

* Le centre de gravité d'un solide en forme de parallélépipède rectangle de densité uniforme est en son centre géométrique.

* Le centre de gravité d'une coque cylindrique circulaire droite de densité uniforme est au milieu de son axe (où son axe est le segment joignant entre les centres de ses bases).

* Le centre de gravité d'un solide en forme de cylindre circulaire droite de densité uniforme est au milieu de son axe (où son axe est le segment joignant entre les centres de ses bases).

* Le centre de gravité d'un prisme droit de densité uniforme est au milieu de l'axe parallèle à ses arêtes latérales et passant par les centres de gravite de ses bases, considérées comme plaques de densité uniforme.



مفاهيم الرياضيات البحتة

تفاضل وتكامل

الصف الثالث الثانوى